



TITLE:

厚みのある超音速三角翼のbow shock wave(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

藤本, 徹哉; 久保, 昇三

---

CITATION:

藤本, 徹哉 ...[et al]. 厚みのある超音速三角翼のbow shock wave(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1983, 477: 258-271

ISSUE DATE:

1983-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103325>

RIGHT:

# 厚みのある超音速三角翼の bow shock wave

京大 エ 数理 藤本徹哉\*

久保昇三

(Fujimoto Tetsuya, Kubo Syozo)

## §1. まえがき

超音速気流中の物体の先頭にできる先頭波については、すでに良く知られているものと思っている人も多いのではないだろうか。たとえば、流れに沿って置かれた薄いクサビをすぎる流れ(図1)においては、クサビ先端から斜め衝撃波が発生するが、この衝撃波の位置および強さについてはすでに良く知られている。<sup>1)</sup>さらに、このクサビを少し傾けて小さな迎角をつけてやっても(図2)、圧縮側に斜め衝撃波、膨張側に有心膨張波が発生し、そのそれぞれ

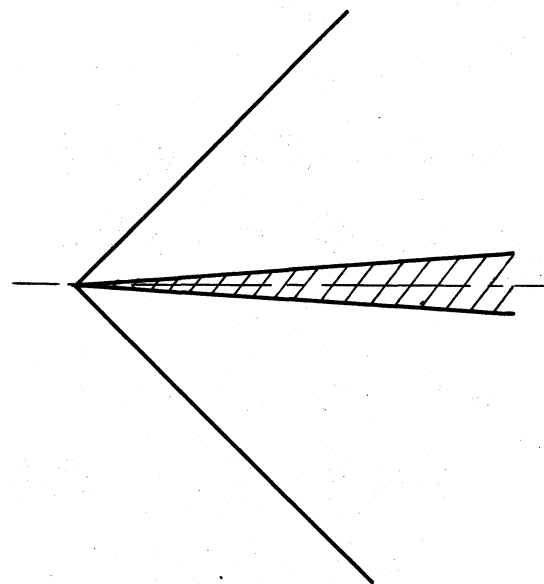


図 1

\*現在 シャープ株式会社 中央研究所

については、やはり、その性質が良く知られている。<sup>1,2)</sup> しながら、このクサビ先端を少し丸くしてやれば(図3)、事柄はたちまち複雑になる。この流れは、クサビ先端の曲率半径が零と見做しうる程度の遠方から見れば、図2の流れと同様なものと考えて良いであろう。一方先端曲率半径と同程度の尺度でこの流れを見れば、これは鈍頭二次元物体前方の離脱衝撃波の問題となり、これに関する研究も数多くなされている。<sup>3~5)</sup> しながら、これら二つの尺度を変えた見方を結びつける過程、すなわち、離脱衝撃波が、物体の肩附近から出る膨張波によ

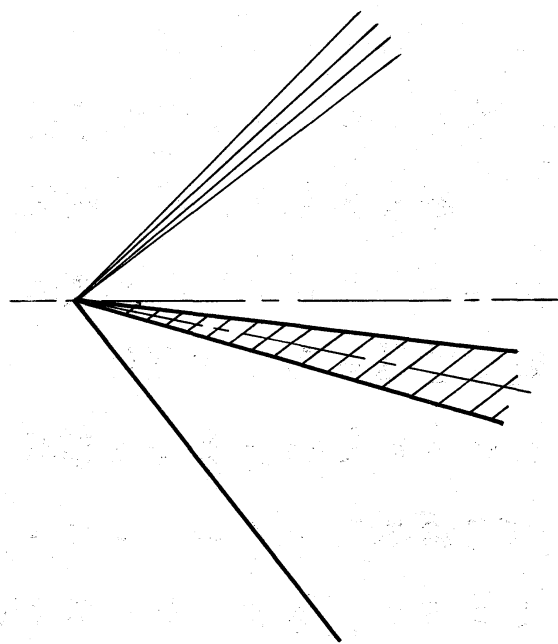


図 2

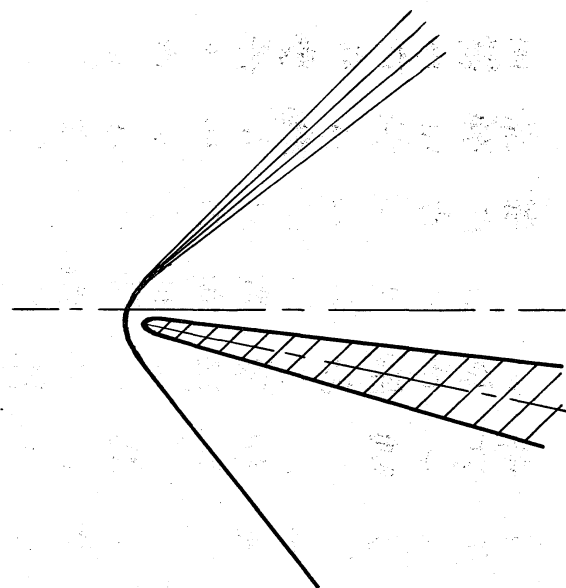


図 3

て弱められ、変形させられていって、最終的には有心膨張波と類似の振舞をするように変ってゆく過程は、未だ詳細には知られていない。このように、比較的簡単な二次元流におい

でも、我々の知識は極めて不十分なものである。

著者達は、超音速で飛行する航空機への応用を念頭に置いて、超音速空気力学を研究しているが、このような超音速飛行においては、二次元翼はほとんど実用に耐えない。実際の超音速翼は、多くの場合、するどい前縁後退角を持つ三角翼またはその変形によって構成されており、前縁は先頭波が形成する錐状体の中に入っている、いわゆる亜音速前縁である。ところで、翼は、その本来的な機能からして、その上・下面の間に圧力差を発生させる仕掛である。したがって、超音速流中にあるのは、下面では空気を強く圧縮し、上面では弱く圧縮または膨張させる。このため、揚力を発生させている超音速三次元翼においては、その先頭波の振舞いも必然的に複雑化せざるを得ない。

ここでは、錐状三角翼をすぎる超音速流に限定し、先頭波に重点を置いて流れの様子を考えてみよう。まず、この種の流れで最も簡単なものは、流れに沿って置かれた細い円錐をすぎる流れ(図4)である。ここでは流れを一樣流に垂直なある断面

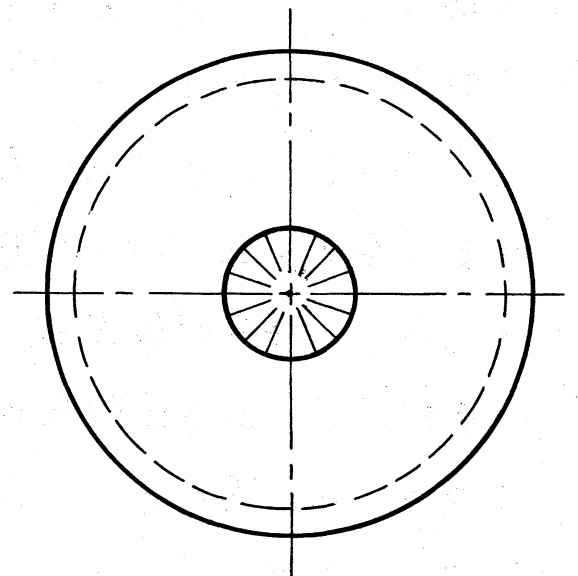


図 4

で切って、その断面内での様子のみを見ることにする。流れに錐状相似性があるので、この見方で流れの全体の様子を把握することが可能である。点線は一樣流の物体先端からの凍結Mach円錐を示す。細い円錐をすぎる流れについても、その性質は良く知られており、<sup>6)</sup>先端波は軸対称な円錐状衝撃波である。物体を円錐の代りに上下方向と左右方向に異方性を持つ角錐で置き換えてやると、前縁が亜音速の場合には図5.1に示すように、先頭衝撃波は左右にやや張り出した形となる。<sup>7)</sup>このため衝撃波の強さは衝撃波に沿って場所毎に異なる。角錐の厚みを薄く保ち、前縁を前に張り出して十分に超音速にしてやると(図5.2)前縁附近では本質的

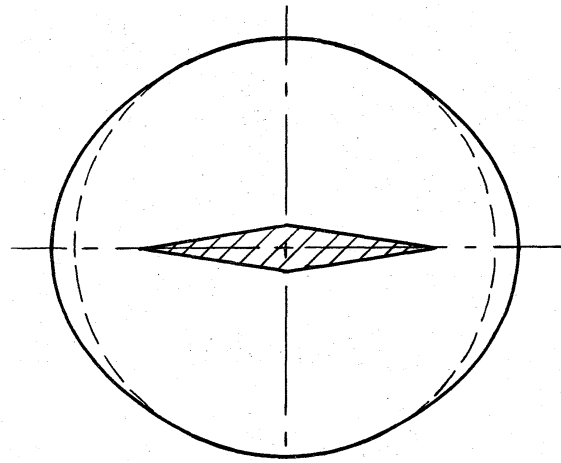


図 5.1

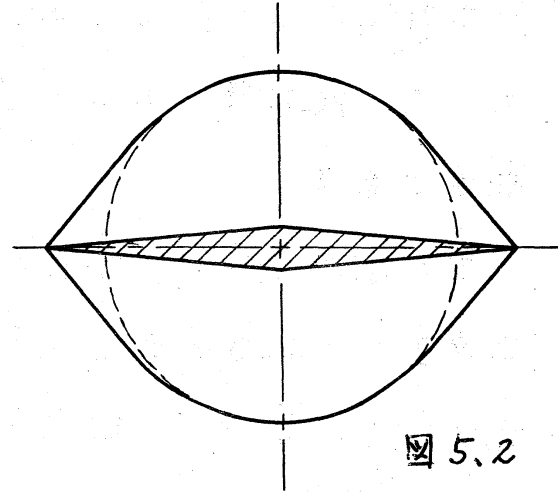


図 5.2

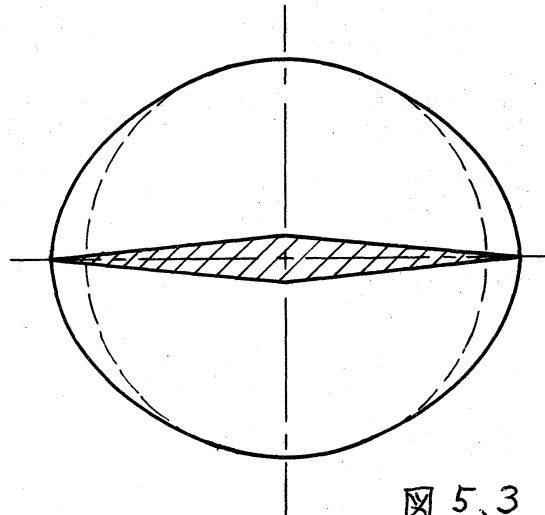


図 5.3

に二次元流の性質を持つようになり、先頭波=前縁波はこの領域で斜め衝撃波となる。しかし、翼中根部では、錐状母線に垂直方向の速度成分が局所音速より低い錐状亜音速のままである（全体の流れは超音速）ので、この前縁波は適当な点で錐状先頭衝撃波に移行しなければならない。この様子もすでに調べられている。<sup>7)</sup> さらに、亜音速前縁と超音速前縁の間の適当な前縁角では、丁度前縁が先頭衝撃波に触れる状態が実現しうる（図5、3）<sup>7)</sup>。このように迎角が零で揚力が発生しない錐状翼においては、膨張流が無いので事柄は比較的簡単である。

翼が迎角を持ち、揚力が発生すれば、事柄はより一層複雑であるが、超音速前縁の場合には前縁附近が本質的に二次元流となり、翼上下の流れの相互干渉が無くなるので、下面では斜め衝撃波、上面では有心膨張波という二次元流れの図式がそのまま適用可能である。<sup>8~10)</sup> したがって、揚力を持つ亜音速前縁翼が最も困難かつ面白い問題となる。この時の流れの概略は、図6に示すように、下面では錐状衝撃波、上面では錐状膨張波があって、その途中で両者が互いに移り変ってゆくものと思われる。これを明瞭にとらえることが我々の課題である。

## § 2. 解析の方針

我々は前節の課題を明らかにするため、できるだけ簡単化した具体的問題を考えなければならぬ。先ず第一に翼前縁断面は丸みを持つものではないとしない。というのは、亜音速前縁においては、下面から上面へ前縁をまわって二次流が存在するので、前縁が角を持てば、この二次

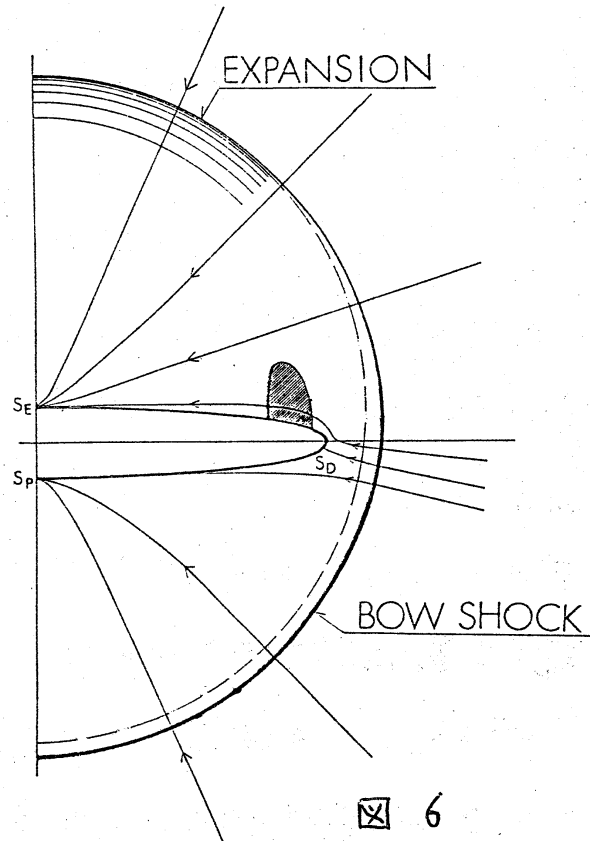


図 6

流に対して特異性を示すことになり、問題に余分な困難さを持ちこむことになってしまうからである。このため、翼の形は対称軸に垂直な断面で楕円に似た形をとることとする。次に我々は流れがポテンシャル流れであると考え、流れの中に衝撃波が発生するのであるから、この流れが厳密にポテンシャル流れであるはずはないが、発生する衝撃波が適当に弱ければ、この衝撃波によるエントロピー変化は十分に小さいものとして無視できる。翼が十分に薄く、迎角もまた小さい場合には、誘起される衝撃波もそんなに強くはないと考えることは妥当である。粘性・熱伝導性はこの流れで基本的役

割を持たないので無視する。さらに流れは剥離を伴わないものと考える。

以上の仮定の下に、基礎方程式と境界条件は全て定まるがこれを厳密に解析的手法で取り扱うことは不可能であるので数値解析に頼ることとしよう。幸い、この種の流れの数値解析法は Siclali<sup>(1)</sup> や Grossman<sup>(2)</sup> によって開発されている。我々は Grossman の手法をそのまま使用する。我々の課題は適当な数値解析法を開発する点にあるのではなくて、適当な手段を用いて先頭波の様子を調べる点にあるのだから、手法としての独創性が無いことは何等問題とはならない。Siclali や Grossman は先頭波の振舞には興味を示しておらず、したがって有効な結論も得ていない。以下に解析法の大略を示す。

まず、数値解析に便利な座標系を作る。具体的には、錐状翼頂点を座標原点とし、翼中方向に  $x$  軸、翼に垂直上方に  $y$  軸、翼対称線に沿って  $z$  軸をとる。これを極座標  $r, \omega, \psi$  を用いて

$$x = r \cos \omega \sin \psi, \quad y = r \sin \omega \sin \psi, \quad z = r \cos \psi$$

と書き表わす。流れが錐状流であるから、全ての物理量は  $r$  に関係しない。したがって、有効な座標は  $\omega$  と  $\psi$  である。これを円筒射影すれば



$$S \equiv p + iq = \tan(\gamma/2) e^{i\omega}$$

が導入できる。さらに、翼面をできるだけ円に近い形に変換するため、Joukowski 変換

$$\frac{S - S_0}{S + \bar{S}_0} = \left( \frac{\gamma - S_0/2}{\gamma + \bar{S}_0/2} \right)^2$$

を行なう。ただし、 $S_0$  は断面の楕円焦点に近い値を選ぶ。最後に複素面  $\gamma$  を  $\gamma = \rho \exp(i\theta)$  によって実数面  $(\rho, \theta)$  に移し、計算が容易なように

$$X = \theta, \quad Y = \frac{\rho - b(\theta)}{c(\theta) - b(\theta)}$$

の座標系をとる。ここで  $b(\theta)$  は翼面、 $c(\theta)$  は先頭縁の十分外側の一樣流中にとった仮想境界面である。

基礎方程式は

$$a^2 \Delta \phi - \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) = 0$$

$$a^2 = a_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi - 1)$$

で、 $\phi$  は速度ポテンシャル、 $a_\infty$  は一樣流中の音速、 $\gamma$  は比熱比で、ここでは 1.4 の値をとるものとしておく。

境界条件は、翼面上では流れが翼面に沿うこと、先頭波より前方では与えられた一様流に一致すること、により与えられる。錐状流の仮定より  $\phi(x, y, z)$  は  $r\phi(\omega, \psi)$  の形を持ち先に示した座標変換により、上述の基礎方程式および境界条件は最終的には  $(X, Y)$  面上での形に書き直されるが、その形は複雑であるので、ここでは略す。

差分化は、一階微分に対しては単純な中心差分を、二階微分に対しては錐状亜音速領域においては緩和法による中心差分を、錐状超音速領域においては流線に垂直には中心差分を流線に沿う方向には後退差分を用いる。また衝撃波の発生にそなえて人工粘性を加える。

圧力は等エントロピーの関係より求める。したがって

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[ \frac{2 + (\gamma - 1) M_\infty^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{\gamma/(\gamma - 1)} - 1 \right\}$$

によって圧力係数が求められる。

### §3. 結果

一様流のMach数  $M_\infty$  が 1.41 のとき翼前縁の中心線からの角度入が  $30^\circ$  (後退角  $60^\circ$ )、翼中に対する厚さの比が8%の翼の迎角  $\alpha$  を  $0^\circ, 4.1^\circ, 6.1^\circ, 10.2^\circ$  と変えて、先頭波を横切る圧力の変化を調べた。具体的には  $X$  を固定し  $Y$  を変化させて、先頭波の立ち上り点と考えられる所から計算点の1メッシ

2 毎の圧力係数の変化を  
 調べた。この結果を図7  
 に示す。 $C_p$ が零の附近が  
 先頭波前方、 $C_p$ が零から  
 離れて点がつまってゆく  
 所が先頭波後方である。  
 数値解析においては、衝  
 撃波面は2~3ヶの計算  
 点で表現されるため、衝  
 撃波の途中に計算点が行  
 在することがあるが、や  
 めをえない。

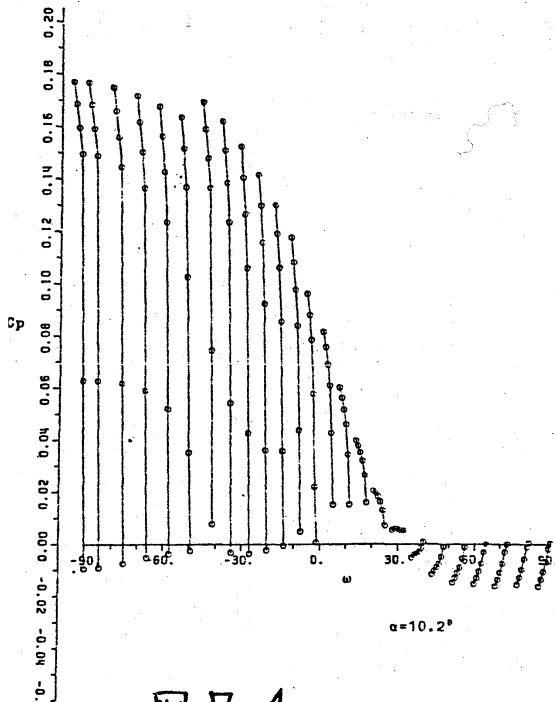


図 7.4

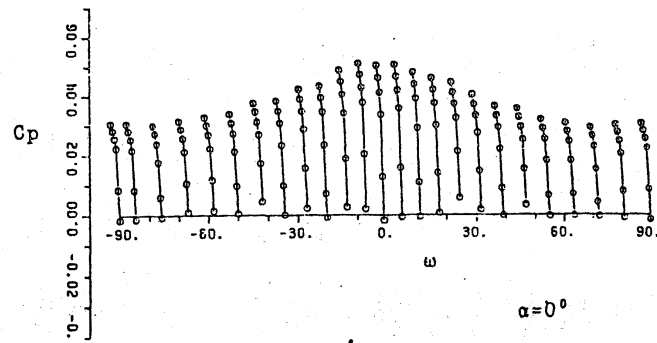


図 7.1

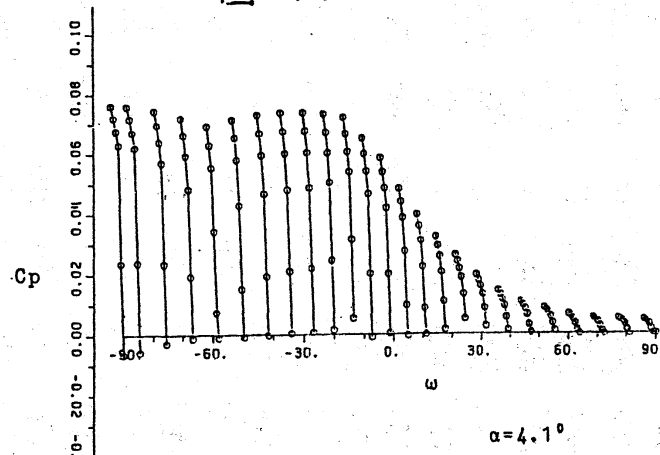


図 7.2

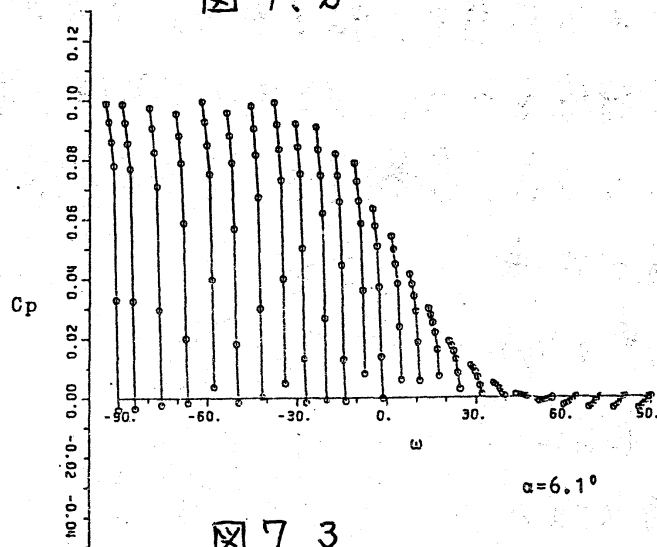


図 7.3

$\alpha = 0^\circ$  の場合、圧力分布は全て  
 正となり、圧縮波=衝撃波を表  
 われている。その強さは翼端部

( $\omega = 0^\circ$  附近) で最も強く、上下面の翼中心 ( $\pm 90^\circ$ ) 附近が最も弱い。 $\alpha$  が  $4.1^\circ$  になれば、翼上面の衝撃波は弱くなり、 $\omega \approx 30^\circ$  では極めて弱いといえる。これに対し、翼下面では衝撃波は強くなる。この傾向は  $\alpha$  が増加するにしたがいどんどん強くなって、 $\alpha = 6.1^\circ$  になれば  $\omega \approx 45^\circ$  で先頭波はむしろ膨張波となる。この点をより明確にするため、 $\alpha = 10.2^\circ$  としたものが図7、4に示してある。ここでは、 $\omega \approx 30^\circ$  で先頭波は、はっきりと膨張波であると云える。

先頭波附近だけでなく、流れの全体の様子がどうなっているかを見るために、上と同じ条件の下に流れの等圧線を描いたものが図8、9aである。 $\alpha = 0^\circ$  のときには、もちろん、上下対称となる。 $\alpha = 6.1^\circ$  のとき、翼下方で等圧線がっまって

いるのは、衝撃波と、その後の流れを示している。しかし上方では、圧力差が少ないために、等圧線の数が極めて少なくなっていてい

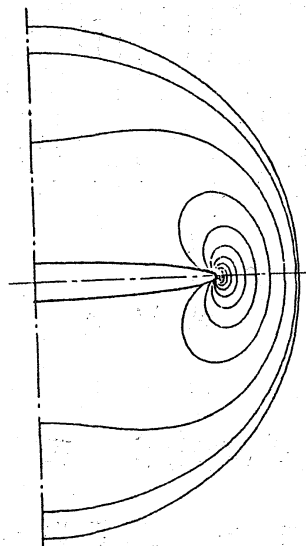
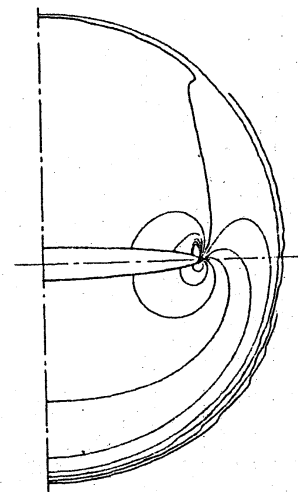


図 8.1

 $\alpha = 0^\circ$  $\alpha = 6.1^\circ$ 

$M = 1.41$   
 $\tau = 0.08$      $\lambda = 30^\circ$

図 8.2

る。 $\alpha = 10.2^\circ$  のときにも、同じ傾向が見られる。この時、錐状母線に垂直な速度成分の等Mach数を図9bに描いた。翼上方には膨張波があっ

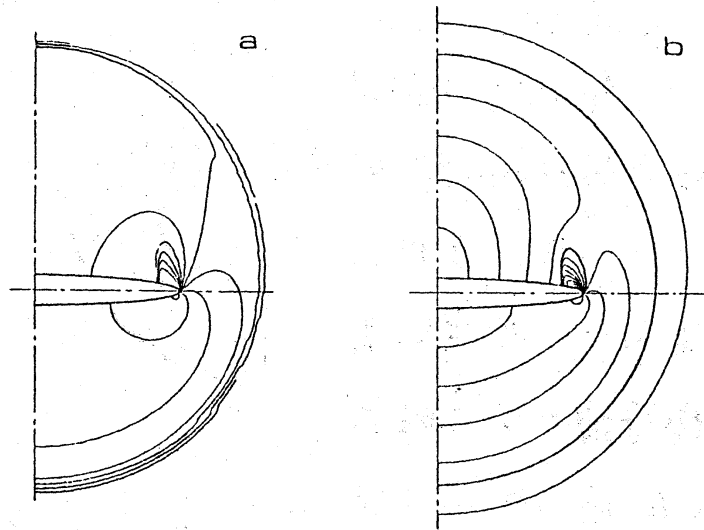


図9

$$M = 1.41 \quad \alpha = 10.2^\circ \\ \tau = 0.08 \quad \lambda = 30^\circ$$

の間隔が広がっているはずであるが、それが明瞭に示されているとはいえない。これを明瞭に見るには、 $\alpha$ をもっと大きくすればいいが、厚み8%の翼でこれ以上 $\alpha$ を大きくすれば翼端剥離、計算不安定などの好ましくない効果を生じる。そこで、流れ

のパラメータを変えて、

$M_\infty = 2$ ,

$\tau = 48\%$ ,

$\lambda = 20^\circ$  の

場合について、

$\alpha = 0^\circ$ ,

$10^\circ, 20^\circ$  の

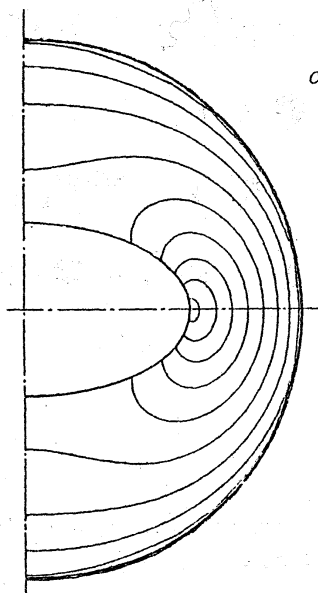


図 10.1

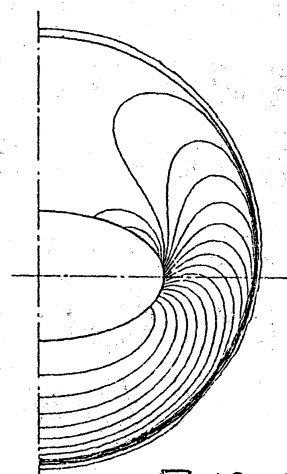


図 10.2

$$M = 2 \\ \tau = 0.48 \quad \lambda = 20^\circ$$

場合を調べた。図10, 11a は等圧線, 図11b は錐状等Mach線を示している。図11bにおいて、物体上方の膨張波による錐状Mach線の広がりも明瞭に示されている。

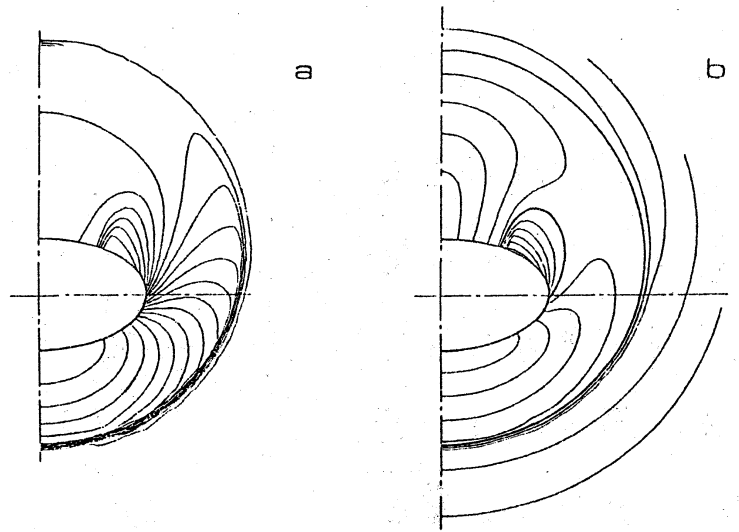


図11  $M = 2$   $\alpha = 20^\circ$   
 $\tau = 0.48$   $\lambda = 20^\circ$

#### §4. おわりに

本報告は、今回の研究集会のテーマ「ナビエ・ストークスの方程式の解」から見れば、 $N-S$  方程式の非散逸極限であるオイラー方程式の等エントロピー過程であるポテンシャル流を取り扱ったものであるもので、かならずしもこのテーマにふさわしいものではない。しかしながら、気体力学の立場からは、基礎的にも、応用的にも興味ある多くの問題を含んでおり、数学的にも圧縮性の流体に関する問題と関連しているものである。テーマにこだわらず、発表の機会を与えて下さった代表者に感謝します。

#### 参考文献

1. Courant, R & Friedrichs, K.O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, (Interscience Pub., New York, 1948), Sec.IVC.
2. *ibid.*, Sec.IVB.

3. リープマン, ロシュコ著, 玉田琬訳, 気体力学, (吉岡書店, 京都, 1960), p. 118.

4. Rizzi, A., *Transonic Solutions of the Euler Equations by the Finite Volume Method*, in *Symposium Transsonicum II*, ed. by Oswatitsch, K & Rues, D., (Springer, Berlin, 1976).
5. Oswatitsch, K., *Spezialgebiete der Gasdynamik*, (Springer, Wien, 1977), Sec. I 17, 19.
6. Courant, R & Friedrichs, K.O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, (Interscience Pub., New York, 1948), Sec. VIB.
7. Sun, Y.C., *J. de Mecanique*, 7 (1968) 521-573.
8. Kutler, P. & Lomax, H., *J. Spacecraft and Rockets*, 8 (1971) 1175-1182.
9. Bannink, W.J. & Nebbeling, C., *AIAA J.*, 11 (1973) 1151-1156.
10. Kubo, S. & Fujimoto, T., *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.*, 24 (1982) 211-221.
11. Siclali, M.J., *AIAA J.*, 18 (1980) 85-93.
12. Grossman, B., *AIAA J.*, 17 (1979) 828-837.